An Important tool for Mathematical Olympiad

"Power of a Point"

Problems and Solution

Konten:

- Teorema dan Lemma
- Soal & Solusi IMO 2000/1
- Soal & Solusi USAMO 1998/2
- Soal & Solusi IMO 1995/1
- Soal & Solusi KTOM Oktober 2017/3 Uraian
- Soal & Solusi OSP 2018/3 Uraian

Vol.1

Struktur Ebook ini

Ebook ini disusun dengan 4(empat) bagian, yaitu toerema dan lemma, problema, hint, dan solusi. Tujuannya agar pembaca bisa mencoba soal-soal yang diberikan terlebih dahulu. Jika kesulitan, terdapat hint untuk masing-masing soal, dimana hint tersebut disusun secara acak(Setiap soal punya lebih dari satu hint). Kemudian dibagian akhir ada solusi setiap soal.

Solusi dari

Agustino, Audrey Felicio Anwar, dan Sulaiman.

Daftar Isi:

Notasi

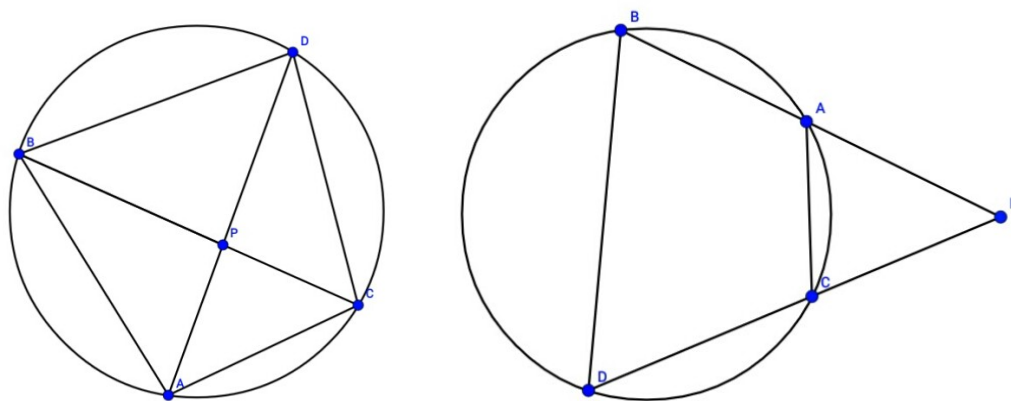
- Definisikan [XYZ] sebagai luas segitiga XYZ dan [WXYZ] sebagai luas segiempat WXYZ. Definisikan juga (ABC) sebagai lingkaran luar segitiga ABC dan (DEFG) sebagai lingkaran luar segiempat DEFG.
- Dua garis yang saling tegak lurus dinotasikan dengan notasi $\perp$.
- Dua garis yang saling sejajar dinotasikan dengan notasi $\parallel$.
- Notasi $E = AB \cap CD$, bearti garis AB dan CD berpotongan di E
- Dua bangun datar yang kongruen dinotasikan dengan notasi $\cong$.

Power of a Point

Teorema dan *Lemma*

Teorema *Power of a Point* atau *Titik Kuasa* mungkin sudah tak asing lagi sebab teorema ini adalah salah satu teorema yang cukup sering digunakan dalam olimpiade Matematika. Bahkan *power of a point* termasuk kedalam modul OSN SMA.

Teorema 1. Misalkan Γ adalah sebuah lingkaran, dan P adalah sebuah titik. Misalkan sebuah garis yang melalui P bertemu Γ di A dan B, dan misalkan garis lain yang melalui garis P bertemu Γ di titik C dan D. Maka

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Dua kasus dari Power of a Point

Perhatikan bahwa jika titik A=B maka PA=PB sehingga PA^2= $PC \cdot PD$, kasus ini saat PA menyingung lingkaran Γ. Kebalikan teorema ini juga benar.

Lebih jauh, definisikan $Pow_\omega(P)$ sebagai kuasa dari titik P terhadap lingkaran ω yang berpusat di O dan berjari-jari r. Dimana

$$Pow_\omega(P) = OP^2 - r^2$$

Lemma 1. Jika terdapat dua lingkaran ω dan γ yang berpotongan di A dan B. Misalkan titik P berada pada garis AB maka kuasa dari titik P terhadap γ sama dengan kuasa titik P terhadap ω. *Neto: perhatikan bahwa garis AB adalah sumbu radikal dari lingkaran ω dan γ.*

Lemma 2. Jika $Pow_\omega(P) = Pow_\omega(R) = 0$ maka titik P dan R berada pada lingkaran ω.

Bukti, Perhatikan bahwa jika titik P berada pada lingkaran ω maka kita punya $PO = r$ sehingga $Pow_\omega(P) = 0$. Begitu juga untuk kuasa dari titik R.

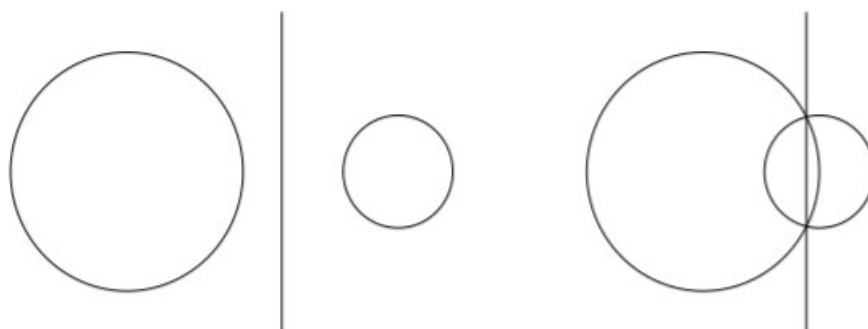
Lemma 3. Jika garis PA menyinggung ω di A dengan titik P diluar ω maka

$$Pow_\omega(P) = PA^2$$

Lemma ini sudah jelas berdasarkan ***Teorema 1***.

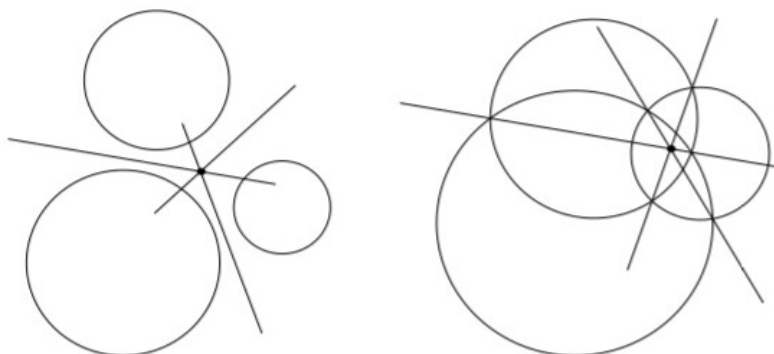
Radical Axis

Materi ini hanya sebagai tambahan untuk membantu menyelesaikan soal-soal nantinya.

Definisi: Misalkan terdapat dua lingkaran yang tidak sepusat, katakanlah lingkaran Ω_1 dan Ω_2 yang berpusat di titik O_1 dan O_2, berturut-turut. Maka sumbu radikal dari lingkaran Ω1 dan Ω2 adalah garis yang melewati titik P dan tegak lurus terhadap garis O_1O_2. Dimana $Pow_{\Omega 1}(P) = Pow_{\Omega 2}(P)$.

Sumbu Radikal

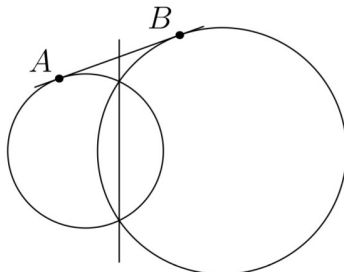
Lemma 4. Jika Ω_1 dan Ω_2 berpotongan dititik A dan $B(A \neq B)$, serta $C = AB \cap O_1O_2$. Maka $AC=BC$.

Bukti, jelas bahwa $O_1A=O_1B$ sehingga $\angle O_1AB = \angle O_1BA$ kita tahu bahwa $O_1O_2 \perp AB$. Jelas bahwa ΔO_1AB sebangun dengan ΔO_1BA(Tinjau besar sudutnya) sehingga $AC/BC = AO_1/BO_1$ padahal $O_1A=O_1B$ sehingga $AC=BC$.

Teorema 2(Radical Center) Misalkan terdapat tiga lingkaran yang tidak sepusat, katakanlah lingkaran ω_1, ω_2, dan ω_3. Jika ketiga pusat lingaran tersebuat tidak kolinear, maka sumbu radikal dari ketiga lingkaran tersebut konkuren. Perpotongan ketiga sumbu radikal tersebut kita sebut sebagai pusat radikal.

Radical Center

Bukti, misalkan sumbu radikal dari lingkaran ω_1 dan ω_2 dengan lingakaran ω_2 dan ω_3 berpotongan di titik *P*. Jelas bahwa $Pow_{\omega 1}(P) = Pow_{\omega 2}(P) = Pow_{\omega 3}(P)$, sehingga sumbu radikal dari ω_1, ω_2, dan ω_3 konkuren. Terbukti.

Problems

Lemma 5. Let Γ_1 and Γ_2 be two intersecting circles. Let a common tangent to Γ_1 and Γ_2 touch Γ_1 at A and Γ_2 at B. Show that the common chord of Γ_1 and Γ_2, when extended, bisects segment AB. Hint: 1, 4

Problem 1. Let C be a point on a semicircle of diameter AB and let D be the midpoint of arc AC. Let E be the projection of D onto the line BC and F the intersection of line AE with the semicircle. Prove that BF bisects the line segment DE! Hint: 20, 21, 5

Problem 2. Let A, B, C be three points on a circle Γ with $AB = BC$. Let the tangents at A and B meet at D. Let DC meet Γ again at E. Prove that the line AE bisects segment BD. Hint: 20, 13, 16

Problem 3. Let ABC be an acute triangle. Let the line through B perpendicular to AC meet the circle with diameter AC at points P and Q, and let the line through C perpendicular to AB meet the circle with diameter AB at points R and S. Prove that P, Q, R, S are concyclic. Hint: 14, 9

Problem 4. (IMO 2000/1) Two circles Γ_1 and Γ_2 intersect at M and N. Let γ be the common tangent to Γ_1 and Γ_2 so that M is closer to γ than N is. Let γ touch Γ_1 at A and Γ_2 at B. Let the line through M parallel to γ meet the circle Γ_1 again at C and the circle Γ_2 again at D. Lines CA and DB meet at E; lines AN and CD meet at P; lines BN and CD meet at Q. Show that $EP = EQ$. Hint: 17, 2, 7

Problem 5. (USAMO 1998/2). Let C_1 and C_2 be concentric circles, with C_2 in the interior of C_1. From a point A on C_1 one draws the tangent AB to C_2 ($B \in C_2$). Let C be the second point of intersection of ray AB and C_1, and let D be the midpoint of AB. A line passing through A intersects C_2 at E and F in such a way that the perpendicular bisectors of DE and CF intersect at a point M on AB. Find, with proof, the ratio AM/MC. Hint: 8, 18, 11

Problem 6. (IMO 1995/1). Let A, B, C, and D be four distinct points on a line, in that order. The circles with diameters AC and BD intersect at X and Y. The line XY meets BC at Z. Let P be a point on the line XY other than Z. The line CP intersects the circle with diameter AC at C and M, and the line BP intersects the circle with diameter BD at B and N. Prove that the lines AM, DN, and XY are concurrent. Hint:

6, 8, 12

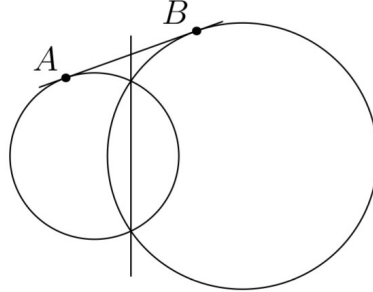
Problem 7. (KTOM; Oktober Uraian/3) Diberikan *ΔABC* dengan titik *D* pada segmen *AC* yang tidak sama dengan *A* dan *C*. Misalkan *E* adalah titik tengah *BD*. Jika $2AE^2 = AD \cdot AC$ maka buktikan bahwa *AB* menyinggung lingkaran luar *ΔAEC*. Hint: 10, 15, 3, 19

Problem 8(OSP 2018) Misalkan Γ_1 dan Γ_2 lingkaran berbeda dengan panjang jari-jari sama dan berturut-turut berpusat di O_1 dan O_2. Lingkaran Γ_1 dan Γ_2 bersinggungan di titik *P*. Garis ι melalui O_1 dan menyinggung Γ_2 dititik *A*. Garis ι memotong Γ_1 di titik *X* dengan *X* diantara *A* dan O_1. Misalkan M titik tengan *AX* dan *Y* titik potong *PM* dengan lingkaran Γ_2 dengan $Y \neq P$. Buktikan bahwa *XY* sejajar O_1O_2. *There is no hint*

Hint

1. Misalkan garis γ melalui common chords dari Γ_1 dan Γ_2, dan P= $\gamma \cap AB$
2. Tunjukkan $ME \perp CD$ dan MP=MQ
3. Sifat garis singgung!
4. Gunakan power of a point.
5. Tunjukkan bahwa (BFE) menyinggung DE!
6. Ekuivalen dengan apakah garis yang konkuren?
7. Tunjukkan $\Delta AEB \cong \Delta AMB$.
8. Which circle are cyclic?
9. Misalkan H titik tinggi ΔABC, apakah A, H, D kolinear?
10. $2AE^2 = 2AE \cdot AE$ ... ?
11. Apa pusat dari lingkaran siklis itu?
12. Radical axes.
13. Lingkaran mana yang menyinggung garis BD selain (ABC)?
14. Misalkan lingkaran dengan diameter AB dan lingkaran dengan diametet AC bertemu sekalilagi di titik D.
15. Yang mana jajargenjang?
16. Tunjukkan bahwa garis BD menyinggung (AEC)!
17. Apa yang ekuivalen dengan soal?
18. Apa yang bisa kita dapat dengan fakta bahwa AD= (¼)AC?
19. Angle chasing!
20. Ingat lemma 5.
21. Lingkaran mana yang menyinnggung garis DE selain semicircle tersebut?

Solution

Lemma 5. Let Γ_1 and Γ_2 be two intersecting circles. Let a common tangent to Γ_1 and Γ_2 touch Γ_1 at A and Γ_2 at B. Show that the common chord of Γ_1 and Γ_2, when extended, bisects segment AB.

Solusi:

Misalkan sumbu radikal dari lingkaran Γ_1 dan Γ_2 yang melalui dua titik potong kedua lingkaran tersebut bertemu segmen AB di P. Sesuai lemma 3, kita punya

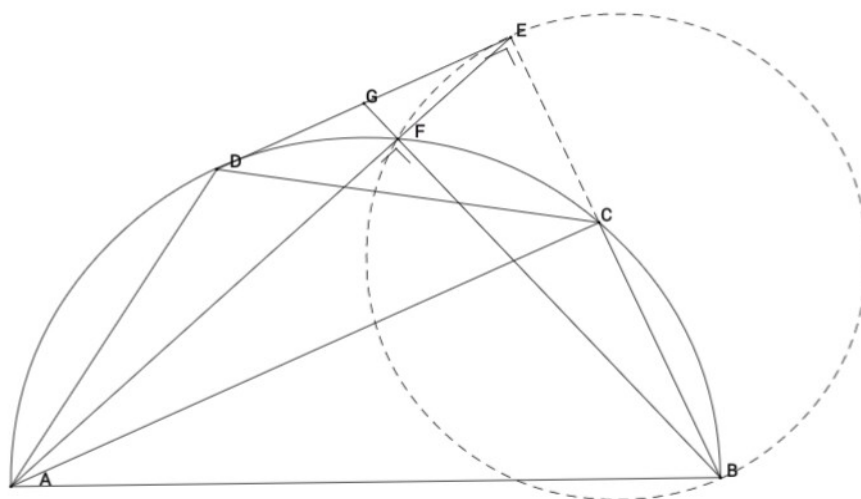
$$Pow_{\Gamma 1}(P) = Pow_{\Gamma 2}(P)$$

$$AP^2 = BP^2$$

$$AP = BP \quad \square$$

Problem 1. Let C be a point on a semicircle of diameter AB and let D be the midpoint of arc AC. Let E be the projection of D onto the line BC and F the intersection of line AE with the semicircle. Prove that BF bisects the line segment DE!

Solusi:

Misalakn BF memotong DE di G. Karena titik E adalah proyeksi titik D ke garis BC maka $DE \perp BC$. Perhatikan juga bahwa $\angle AFB$= 90°.

Perhatikan bahwa $\angle BFE = 90°$ sehingga terdapat sebuah lingkaran yang melalui B, F dan E dengan BE adalah diameternya. Oleh karena $BE \perp DE$ maka $DE \perp BE$ sehingga DE menyinggung (BFE) di E. Karena titik D ditengah busur AC, maka ADC sama kaki dengan $AD=CD$. Misalkan $\angle DCA = \angle DAC = \beta$, perhatikan bahwa $AC \perp BE$ sehingga $\angle DCE = 90° - \beta$ dan kita juga punya $\angle CDE = \beta$. Padahal $\angle CDE = \angle CAD = \beta$ sehingga garis ED menyinggung (ABC) di D. Maka

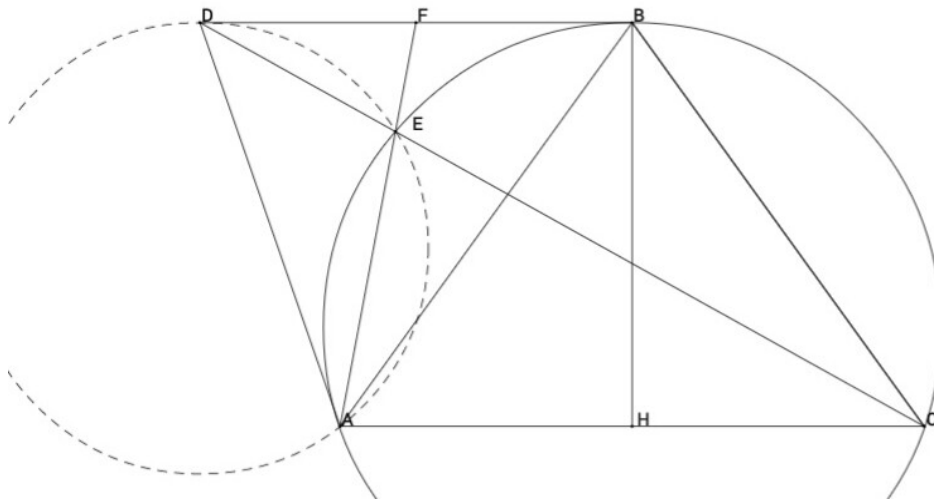
$$Pow_{(ABC)}(G) = Pow_{(BFE)}(G)$$

$$DG^2 = GE^2$$

$$DG = GE \ \square$$

dan kita selesai.

Problem 2. Let A, B, C be three points on a circle Γ with $AB = BC$. Let the tangents at A and B meet at D. Let DC meet Γ again at E. Prove that the line AE bisects segment BD.

Solusi:

Misalkan AE memotong BD di F dan garis tinggi dari B pada ΔABC memotong AC di H.

Lemma. Diameter (ABC) berimpit dengan garis HB.

Bukti, perpanjang BH hingga memotong (ABC) sekali lagi di K. Kita punya $\angle ACK = \angle ABK = \angle KBC$, padahal $\angle ACB + \angle KBC = 90°$ sehingga $\angle KCB = 90°$. Kesimpulan mengikuti

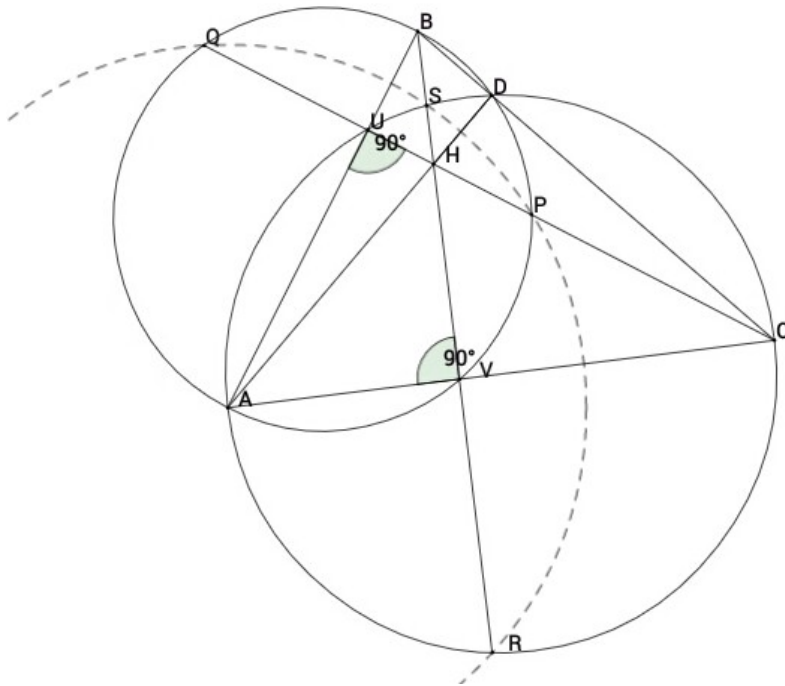
Karena segmen DB menyinggung (ABC) di B maka $DB \perp BH$ sehingga $AC \parallel DB$. Misalkan $\angle ACE = \theta$, karena $AC \parallel DB$ maka $\angle CDB = \theta$, karena DA menyinggung (ABC) di A maka $\angle DAE = \angle ACE = \theta$. Sehingga DB menyinggung (DAE) di D, sebab $\angle BDE = \angle DAE = \theta$. Sekarang kita punya

$$Pow_{(ABC)}(F) = Pow_{(DAE)}(F)$$

$$FB^2 = FD^2$$

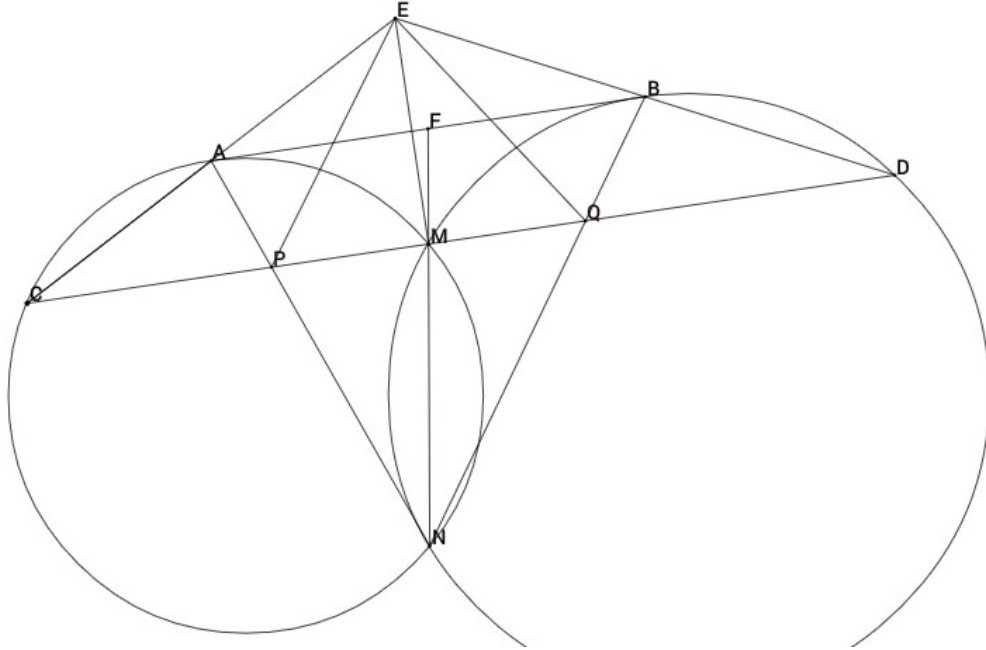
$$FB = FD \; \blacksquare$$

Problem 3. Let ABC be an acute triangle. Let the line through B perpendicular to AC meet the circle with diameter AC at points P and Q, and let the line through C perpendicular to AB meet the circle with diameter AB at points R and S. Prove that P, Q, R, S are concyclic.

Solusi:

Misalkan $U = CQ \cap AB$ dan $V = BR \cap AC$. Misalkan juga lingkaran dengan diameter AC dan lingkaran dengan diameter AB bertemu di titik A dan D. Sebab AC adalah diameter (ACD) maka $\angle ADC = 90°$ dan $\angle ADB = 90°$, sehingga AD adalah garis tinggi dari A pada ΔABC. Padahal CU dan BV juga garis tinggi, sehingga CU, BV, AD konkuren, katakanlah titik temu dari CU, BV, AD adalah H. Dengan Power of a Point, maka $HS \cdot HR = DH \cdot AH = HP \cdot HQ$ sehingga $PQRS$ siklis.

Note. Tunjukkan bahwa A adalah pusat $(PQRS)$.

Problem 4. (IMO 2000/1) Two circles Γ_1 and Γ_2 intersect at M and N. Let γ be the common tangent to Γ_1 and Γ_2 so that M is closer to γ than N is. Let γ touch Γ_1 at A and Γ_2 at B. Let the line through M parallel to γ meet the circle Γ_1 again at C and the circle Γ_2 again at D. Lines CA and DB meet at E; lines AN and CD meet at P; lines BN and CD meet at Q. Show that $EP = EQ$.

Solusi:

Soal ekuivalen dengan membuktikan bahwa ΔEPQ sama kaki dengan EP=EQ.

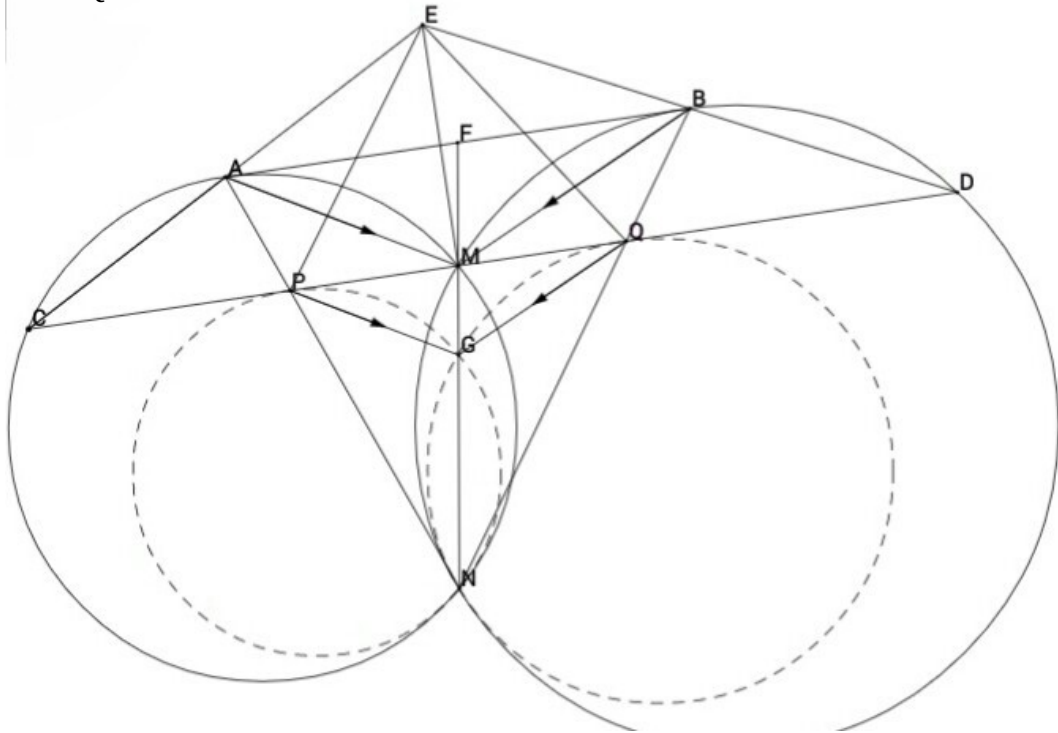
Misalkan $F= NM\cap AB$.

<u>Claim</u> $\Delta AEB \cong \Delta AMB$.

Sebab AB menyinggung Γ_1 dan Γ_2 di A dan B, berturut-turut serta $AB\parallel CD$ maka $\angle ACM=\angle ANM=\angle BAM=\angle BAE=\angle AMD$ dan $\angle MDB=\angle BNM=\angle ABM=\angle ABE=\angle DMB$. Sehingga $\angle BAM=\angle BAE$ dan $\angle ABM=\angle ABE$ serta salah satu sisi dari ΔAEB dan ΔAMB berimpit dan sama panjang, yang akan terpenuhi jika dan hanya jika $\Delta AEB \cong \Delta AMB$. Claim selesai.

<u>Claim</u> $EM\perp CD$.

Sebab $\Delta AEB \cong \Delta AMB$ dan $\angle MAB=\angle BAE$ maka $AM=AE$ dan $BM=BE$. Dalam kata lain $AMBE$ adalah layang-layang, sehingga $AB\perp EM$. Padahal $AB\parallel CD$ maka $EM\perp CD$.

Claim $MP=MQ$.

Misalkan terdapat titik G_1 pada MN sehingga $PG_1 \| AM$ dan titik G_2 pada MN sehingga $QG_2 \| BM$. Padahal AM, BM, dan MN konkuren sehingga QG_2, PG_1, dan MN juga konkuren sebab $AB \| PQ$(kesebangunan). Sehingga $G_1=G_2$, misalkan $G_1=G_2=G$.

Perhatikan bahwa $\angle GPM=\angle PMA=\angle MAB=\angle ANM$, maka $\angle GPM=\angle PNG$ sehingga MP menyinggung (PNG) di P. Dengan cara yang sama kita juga punya fakta bahwa MQ menyinggung (QNG) di Q. Dengan demikian

$$MP^2 = MG \cdot MN = MQ^2$$

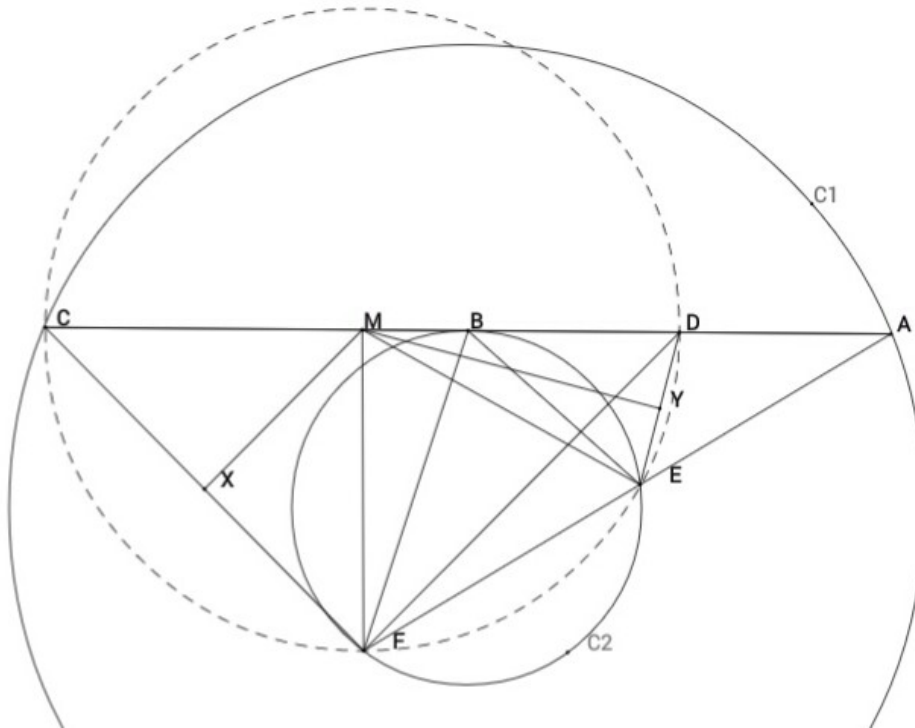
$$MP^2 = MQ^2$$

$$MP = MQ \ \square$$

Dengan menggabungkan semua claim diatas, maka $ME \perp PQ$ dan $MP=MQ$ akan terpenuhi jika dan hanya jika ΔEPQ sama kaki dengan $EP = EQ$. □

Note. Saya rasa trivialy $MP=PQ$.

Problem 5(USAMO 1998/2). Let C_1 and C_2 be concentric circles, with C_2 in the interior of C_1. From a point A on C_1 one draws the tangent AB to C_2 ($B \in C_2$). Let C be the second point of intersection of ray AB and C_1, and let D be the midpoint of AB. A line passing through A intersects C_2 at E and F in such a way that the perpendicular bisectors of DE and CF intersect at a point M on AB. Find, with proof, the ratio AM/MC.

Solusi:

Misalkan X pada GF sehingga $MX \perp GF$ dan Y pada DE sehingga $MY \perp DE$.

Claim $DEFC$ siklis.

Perhatikan bahwa $AE \cdot AF = AB^2 = (AC/2)^2 = AC^2/4 = (AC/4) \cdot AC$. Padahal $AD = (1/4) \cdot AC$ sehingga $AE \cdot AF = AD \cdot AC$, sehingga $DEFC$ siklis.

Lemma. M adalah pusat ($DEFC$).

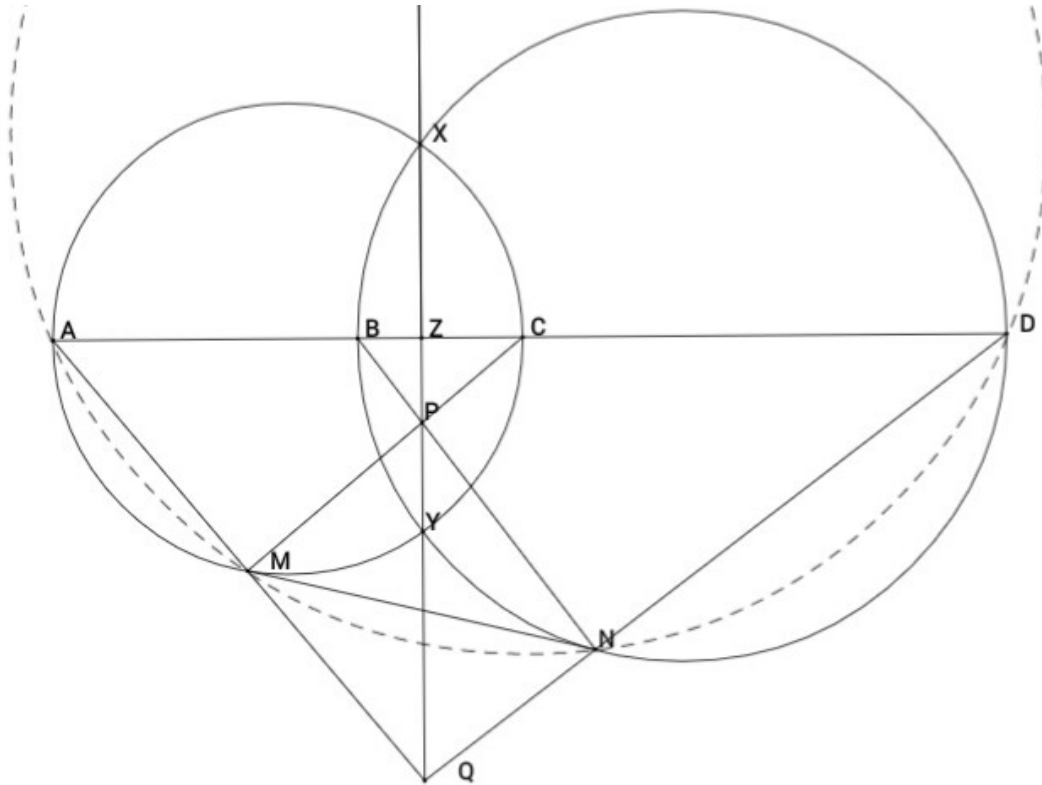
Perhatikan bahwa CF dan DE adalah talibusur dari busur CF dan busur DE pada ($DEFC$), padahal dengan menggabungkan fakta bahwa $CX=FX$ dan $EY=DY$ dengan $MX \perp CF$ dan $DE \perp MY$ maka dapat disimpulkan bahwa garis MX dan MY berimpit dengan diameter-diameter dari lingkaran ($DEFC$), perpotongan dari dua diameter pada suatu lingkaran adalah pusat lingkaran. Sehingga titik M adalah pusat ($DEFC$).

Padahal titik A, D, B, M, C kolinear, sehingga $CM=DM$. Sekarang mudah, jelas $2 \cdot CM = CD = (3/4) \cdot AC \Leftrightarrow CM=DM= (3/8) \cdot AC$. Maka

$AM/CM = (DM+AD)/CM = (AC \cdot 3/8 + AC \cdot 1/4)/(AC \cdot 3/8) = (5/8)/(3/8) = 5/3$. □

Problem 6(IMO 1995/1). Let *A, B, C,* and *D* be four distinct points on a line, in that order. The circles with diameters *AC* and *BD* intersect at *X* and *Y* . The line *XY* meets *BC* at *Z*. Let *P* be a point on the line *XY* other than *Z*. The line *CP* intersects the circle with diameter *AC* at *C* and *M*, and the line *BP* intersects the circle with diameter *BD* at *B* and *N*. Prove that the lines *AM, DN,* and *XY* are concurrent.

Solusi:

Ingat tentang teorema Pusat Radikal.

Claim *ADMN* siklis

Dengan *Power of a Point* perhatikan bahwa $MP \cdot CP = PY \cdot PX = NP \cdot BP$, sehingga *MNCB* siklis. Jelas $\angle BND = \angle CMA = 90°$. Perhatikan bahwa $\angle NMC = \angle NBD = \angle NBC = 90° - \angle NDB$, padahal $\angle NMA + \angle NDB = 90° - \angle NDB + 90° + \angle NDB = 180°$ maka *ADMN* siklis. Claim selesai.

Misalkan (*ADMN*)= ω_1 , (*NBD*)= ω_2, dan (*MCA*)= ω_3. Perhatikan bahwa sinar *DN* adalah sumbu radikal dari ω_1 dengan ω_2, sinar *XY* adalah sumbu radikal dari ω_2 dengan ω_3, sinar *AM* adalah sumbu radikal dari ω_1 dengan ω_3.

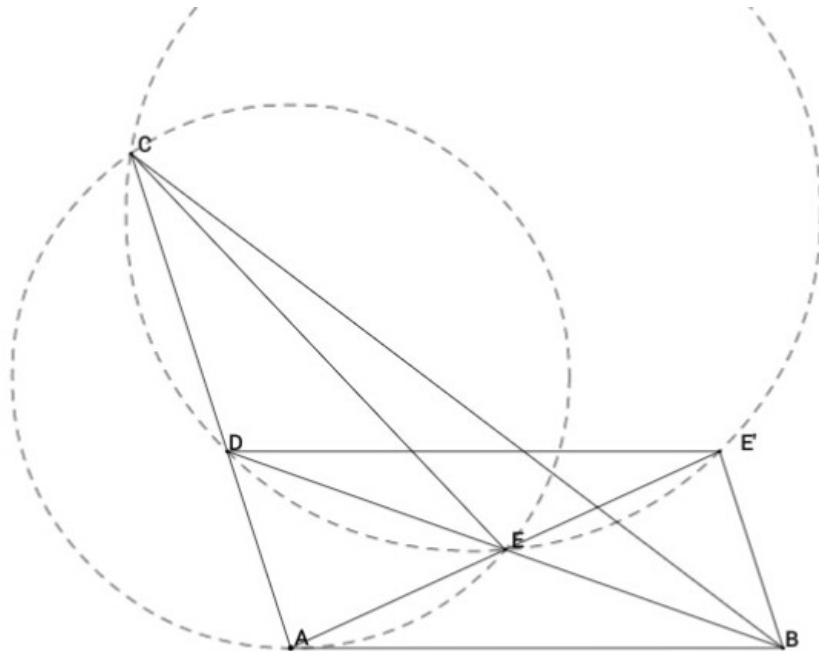
Berdadarkan teorema pusat radikal, maka sinar *DN, XY,* dan *AM* konkuren. ∎

Note. Saat anda menggambar untuk soal uraian yang serupa, asumsikan pada solusimu bahwa kita belum mengetahui AM, DM, dan XY konkuren.

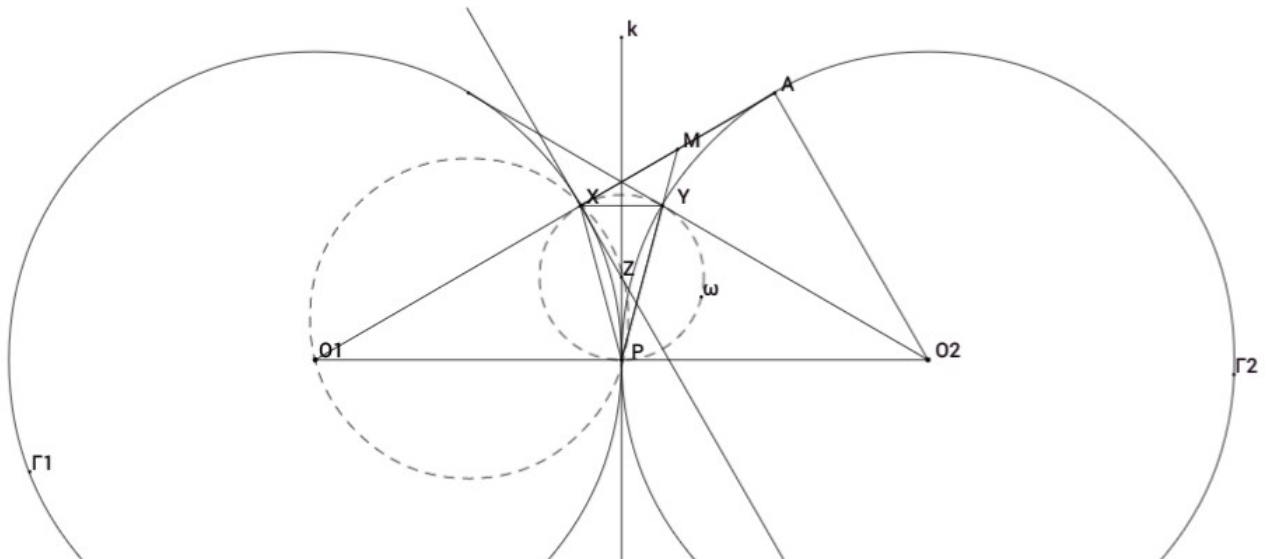
Problem 7(KTOM; Oktober Uraian/3) Diberikan ΔABC dengan titik D pada segmen AC yang tidak sama dengan A dan C. Misalkan E adalah titik tengah BD. Jika $2AE^2 = AD \cdot AC$ maka buktikan bahwa AB menyinggung lingkaran luar ΔAEC.

Solusi:

Pertama kali saya melihat persamaan $2AE^2 = AD \cdot AC$ langsung terpikirkan teorema *Power of a Point.* Kita buat garis bantunya untuk menemukan lingkaran powernya;

Perhatikan persamaan $2AE^2 = AD \cdot AC$, lihat bahwa ruas kiri $2AE^2 = 2AE \cdot AE$. Kita buat garis bantunya dari persamaan $2AE$, kita perpanjang AE hingga ke titik E' dengan $AE' = 2 \cdot AE$. Disini titik E diantara titik A dan E'.

Karena titik E adalah titik tengah BD dan AE' maka $ABE'C$ merupakan sebuah jajar genjang sehingga $AB \| DE'$. Lihat kembali persamaan $2AE^2 = AD \cdot AC = 2AE \cdot AE = AE' \cdot AE$. Berdasarkan teorema *Power of a Point* maka persamaan $AE' \cdot AE = AD \cdot AC$ akan terpenuhi jika dan hanya jika terdapat sebuah lingkaran yang melalui D, E, E' dan C atau dalam kata lain $DEE'C$ siklis. Karena $DEE'C$ siklis maka $\angle DCE = \angle EE'D$(sudut keliling) perhatikan juga bahwa $AB \| DE'$ sehingga $\angle BAE = \angle EE'D$(sifat garis sejajar). Dari sini kita punyai $\angle EE'D = \angle BAE = \angle DCE$, sesuai lemma yang ada bahwa jika $\angle BAE = \angle DCE$ maka garis AB menyinggung (AEC) di A dan kita selesai.

Problem 8(OSP 2018) Misalkan Γ_1 dan Γ_2 lingkaran berbeda dengan panjang jari-jari sama dan berturut-turut berpusat di O_1 dan O_2. Lingkaran Γ_1 dan Γ_2 bersinggungan di titik P. Garis ι melalui O_1 dan menyinggung Γ_2 dititik A. Garis ι memotong Γ_1 di titik X dengan X diantara A dan O_1. Misalkan M titik tengan AX dan Y titik potong PM dengan lingkaran Γ_2 dengan $Y \neq P$. Buktikan bahwa XY sejajar O_1O_2.

Solusi:

Misalkan garis k melalaui P dan tegak lurus O_1O_2. Maka garis k adalah garis singgung persekutuan dari Γ_1 dan Γ_2. Karena Γ_1 dan Γ_2 berjari-jari sama, k juga garis sumbu O_1O_2. Misalkan k dan garis singgung Γ_1 yang melalui X berpotongan di Z. Diperoleh $XZ=YZ$. Konstruksi lingkaran ω yang berpusat di Z dengan jari-jari XZ. Lihat

$$Pow_{\omega}(M) = MX^2 = MA^2 = Pow_{\Gamma 2}(M)$$

$$Pow_{\omega}(P) = 0 = Pow_{\Gamma 2}(P)$$

Sehingga PM adalah sumbu radikal dari ω dan $\Gamma_2 \Rightarrow PM \perp ZO_2$. Y pada PM dengan $Pow_{\Gamma 2}(Y) = 0$. Akibatnya, $Pow_{\omega}(Y) = 0 \Rightarrow$ titik Y pada ω. Karena $ZP=ZY$ sebagai jari-jari ω. Dan $ZO_2 \perp PY$,diperoleh ZO_2 garis sumbu PY. $\angle ZPO_2 = 90° \Rightarrow \angle ZYO_2 = 90°$. Jadi Y adalah titik singgung dari Z ke Γ_1 dan X titik singgung dari Z ke Γ_1. Sementara Z pada sumbu simetri k dari Γ_1 dan Γ_2(Γ_1 dan Γ_2 berjari-jari sama; k garis singgung sekutunya $\Rightarrow$ k sumbu simetri refleksi), berarti $XY \perp k$, padahal $O_1O_2 \perp k$, terbukti $XY \| O_1O_2$.